Cuadernillo Pre-Ingreso

Introducción a la Matemática, Física y Química

Carrera: Profesorado en Educación Física
Ubicación en Plan de Estudios: Primer año

Introducción

El presente cuadernillo ha sido elaborado como material de repaso de los contenidos aprendidos en la escuela media y que deben manejarse para encarar el cursado de Introducción a la Matemática, Física y Química. Algunos temas que serán vistos nuevamente en el curso (números naturales, enteros, etc.) son incluidos en este apunte para dar contexto a los conceptos que no pertenecen al programa de la materia (y por lo tanto no serán discutidos como contenido de la cursada), pero sí serán aplicados para resolver los problemas presentados. Específicamente se espera que el alumno tenga dominio de operaciones con fracciones (para lo cual necesitará comprender el concepto de mínimo común divisor), radicación, potenciación, resolución de operaciones con signos de agrupación (paréntesis, llaves, etc.), reglas de tres simple, notación científica y despeje de variables en ecuaciones simples. El apunte se presenta con un breve acercamiento teórico a cada tema, explicación de resolución de problemas y propuestas de ejercicios prácticos.

La confección de este apunte se realizó basándose en:
“Módulo para curso de preparación para ingreso del profesorado de matemática” del Instituto Superior de Formación Docente Inspector Albino Sanchez Barros, La Rioja, ciclo lectivo 2014;
“Guía didáctica para el despeje de variables en números reales”, curso introductorio de Matemática para Ciencias del Deporte, Universidad Nacional Experimental del Yarucuy, Venezuela, 2010.
“Curso Previo de Matemática. Programa de Ingresantes-CBC Matemática”, guía práctica Universidad de Buenos Aires.

1. Números naturales

1.1. Nociones básicas

Los números naturales son, tal como los conocemos, 1, 2, 3, 4, 5,. . . infinitos. Llamamos **N** al conjunto de los números naturales, es decir:

N = { 1, 2, 3, 4, 5, ...}

Estos números se usan a diario para contar. Matemáticamente, contar significa decir cuántos elementos tiene un conjunto. Por ejemplo, el conjunto {a, b, c, d} tiene 4 elementos. ¿Cuántos elementos tiene el conjunto vacío? Como el conjunto vacío no posee ningún elemento, necesitamos un símbolo nuevo que represente la cantidad de elementos de este conjunto. Este símbolo es el 0. Llamamos N_0 al conjunto de los números naturales con el cero, o sea:

N_0 = N U {0} = {0, 1, 2, 3, 4, 5,...}

1.2. Propiedades

- ✓ Es un conjunto infinito, totalmente ordenado por la relación de menor o igual (≤).
- ✓ Tiene primer elemento, el número 1.
- ✓ No tiene último elemento, es un conjunto infinito.
- ✓ Todo número natural tiene un siguiente.
- ✓ Entre dos números naturales consecutivos no hay ningún número natural y entre dos naturales no consecutivos hay un conjunto finito de números naturales, por eso es un **conjunto discreto**.

1.3. Operaciones

El conjunto de los números naturales tiene dos operaciones importantes: la **suma** y el **producto**. Ambas son operaciones asociativas y conmutativas. El 1 es el neutro para el producto (todo número natural multiplicado por 1 da como resultado el mismo número natural), y la suma no tiene elemento neutro en N, pero sí en N_0: el 0 (todo número natural sumado a 0 da como resultado el mismo número natural). La suma repetida de un mismo número se llama multiplicación, o también usaremos el término producto. Así, sumar 5 veces 8 es multiplicar 5 por 8, y coincidentemente, es lo mismo que sumar 8 veces 5. Esto es:

8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 5 . 8 y además

8 + 8 + 8 + 8+ 8 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5

5 veces 8 veces

Por lo tanto, en el conjunto de los números naturales podemos definir 2 operaciones: suma y multiplicación. Estas operaciones son cerradas, es decir, la suma y la multiplicación entre dos números naturales es otro número natural. Además las operaciones cumplen con las siguientes propiedades:

<u>Conmutatividad</u>: esta propiedad se refiere a que el orden de los términos de una suma o de los factores en una multiplicación no altera el resultado (utilizaremos de aquí en adelante al signo punto "." como signo de multiplicación) . Por ejemplo:

5 + 6 = 6 + 5 = 11 ; 2 . 3 = 3 . 2 = 6

✓ <u>Asociatividad:</u> esta propiedad se refiere a que la forma de agrupar los términos en una suma o en una multiplicación no altera el resultado. Por ejemplo:

2 + (3 + 4) = (2 + 3) + 4 = 9

2 . (3 . 4) = (2 .3) .4 = 24

✓ <u>Distributividad:</u> de la multiplicación respecto de la suma: la multiplicación distribuye respecto de la suma. Por ejemplo:

5 . (3 + 5) Puede calcularse distribuyendo entre los dos sumandos del paréntesis el "5" que está multiplicando

$5 \,.\, (3 + 5) = 5.\,3 + 5.\,5 = 15 + 25 = 40$

O resolviendo el paréntesis y después multiplicando por el “5”.

$5 \,.\, 8 = 40$

En ambos casos, naturalmente, el resultado es el mismo. En el primer caso, se aplicó la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma.

Ejercicios:

Calcular aplicando distribuitividad:

a) $3.\,(2 + 3) + 8\,(5 + 1) =$

b) $4.\,(2+ 7) + 2.\,(4 + 3)=$

c) $2.\,(2 + 3 + 5) + 5.\,(4 + 1)$

1.3.1. Potenciación: Así como la multiplicación por un natural es una suma iterada de términos iguales (se suma repetidamente el mismo término), se conviene en representar la multiplicación iterada de factores iguales, como una potencia:

$8 \,.\, 8 \,.\, 8 \,.\, 8 = 8^4$

En este caso, 8 se llama la base y 4 el exponente. El exponente indica el número de veces que se multiplica a la base por sí misma. Notemos por ejemplo que:

$5^2 \,.\, 5^4 = 5^{2+4} = 5^6$ puesto que

$(5 \,.5)\,(5 \,.\, 5 \,.\, 5 \,.\, 5) = 5 \,.\, 5 \,.\, 5 \,.\, 5 \,.\, 5 \,.\, 5$

2 veces 4 veces 6 veces

La multiplicación de dos potencias de igual base es otra potencia con la misma base, y cuyo exponente es la suma de los exponentes.

1.3.2. Divisibilidad

Sean a y b números naturales. Se dice que a es divisible en b si el resto de a ÷ b es cero. Es decir, en el caso general

$$\begin{array}{l|l} a & b \\ \cline{2-2} c & d \end{array}$$

a es divisible por b si el resto c es igual a 0. b es el divisor y d es el cociente.

O dicho de otra manera, siendo a y b números naturales, la división de a por b, consiste en encontrar a los números naturales c y d tales que:

d . b + c = a para todo a > b y c=0.

Ejemplos

48 es divisible en 8, el cociente (resultado) de la división es 6 y el resto es cero. Decimos entonces que 8 es divisor de 48. ¿Qué otros divisores tiene 48?

48 se puede dividir por: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24 y 48

Entonces un número es **b** es **divisor** de otro **a**, si y sólo si el resto de la división es cero.

Un número tiene una cantidad finita de divisores.

✓ Todo número se puede dividir por sí mismo y por uno. Pero sí un número sólo se puede dividir por sí mismo y por uno, entonces es un **número primo**.

- ✓ Si un número además de ser divisible por sí mismo y por la unidad, lo es por otros divisores; entonces es **número compuesto.**
- ✓ **1 es divisor de todos los números.**
- ✓ El **número 1** no es primo, ni compuesto.

Ejemplos
12 es número compuesto, porque tiene como divisores al: 1, 2, 3, 4, 6 y 12 (o sea, es divisible por todos ellos).
28 es número compuesto, porque tiene como divisores al: 1, 2, 4, 7, 14 y 28.
5 es número primo, porque sólo se puede dividir por 1 y por 5.
7 es número primo, porque sólo se puede dividir por 1 y por 7.
2 es el menor de los números primos.

1.4. Múltiplos
El múltiplo de un número es el que lo contiene un número exacto de veces
Ejemplos
36 es múltiplo de 9, porque lo contiene 4 veces.
240 es múltiplo de 12, porque lo contiene 20 veces.
Los múltiplos de un número k se obtienen al multiplicar k por los números naturales: k.n siendo n cualquier número natural.
Ejemplos
Los múltiplos de 3 son: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21,..., porque 3. (1) = 3; 3. (2) = 6; 3. (3) = 9; 3. (4) = 12; 3. (5) = 15; 3. (6) = 18; 3. (7)= 21; etc.
Los múltiplos de 5 son: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, ... , porque 5. (1) = 5; 5. (2) = 10; 5. (3) = 15; 5. (4) = 20; 5. (5) = 25; 5. (6) = 36; 5. (7) = 35; etc.
- ✓ A diferencia de los divisores, los múltiplos de un número son infinitos.
- ✓ **0 es múltiplo de todos los números.**

1.4.1. Descomposición de un número en sus factores primos
La descomposición de un número en sus factores primos es su expresión como producto de sus factores primos. Para obtenerlo, se divide el número por el menor divisor primo posible, el cociente que se obtiene se vuelve a dividir por el menor divisor primo posible, y así hasta que el último cociente sea 1, este procedimiento también se conoce como **factorización de un número compuesto.**

Por ejemplo:
Expresar 72 como el producto de sus factores primos

Solución:
$72 \div 2 = 36$
$36 \div 2 = 18$
$18 \div 2 = 9$
$9 \div 3 = 3$
$3 \div 3 = 1$
Por lo tanto $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$

Ejercicios
Expresar como el producto de sus factores primos los siguientes números:

a) 84	d) 327
b) 1535	c) 10000
c) 144	e) 525

1.4.2. Máximo común divisor (MCD)

Es el mayor de los divisores en común de 2 o más números.

Ejemplo 1
Los divisores de 18 y 24 son:
Divisores de 18: 1, 2, 3, 6, 9 y 18
Divisores de 24: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 y 24
Los divisores comunes son: 1, 2, 3 y 6, el mayor de los divisores en común es el 6
Por tanto, el máximo común divisor de 18 y 24 es 6.
Para calcular el MCD de varios números se descomponen simultáneamente en sus factores primos, hasta que ya no tengan un divisor primo en común.

Ejercicios
Hallar el MCD de los siguientes pares de números
a) 81 y 9
b) 420 y 84
c) 500 y 325

1.4.3. Mínimo común múltiplo (mcm)
El mínimo común múltiplo es el menor de todos los múltiplos comunes de 2 o más números.

Ejemplo 1
Al obtener los múltiplos de 4 y 6 se tiene:
Múltiplos de 4: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, …
Múltiplos de 6: 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, …
Los múltiplos comunes son: 12, 24, 36, 48, …
El menor de todos los múltiplos en común es 12
Por tanto, el mínimo común múltiplo de 4 y 6 es 12
Para calcular el mcm de varios números se descomponen simultáneamente en factores primos. El mcm será el producto de los factores primos comunes y no comunes elevados a la mayor potencia

Ejemplo 2
Dados los números 60 y 108, hallar el mcm.
Para esto expresamos ambos números como sus factores primos:
$60=2 \,.\, 2.\, 3.\, 5 = 2^2.\, 3.\, 5$
$108=2.\, 2.\, 3.\, 3.\, 3 = 2^2.\, 3^3$
Los factores primos comunes son 2 y 3. El mayor exponente al que está elevado el 2 es 2 (en este caso se da para los dos números) el mayor exponente al que está elevado el 3 es 3 (que se da para el caso del 108). El único factor primo no común es el 5 y el mayor exponente al que está elevado es 1 (en el 60). El mcm será entonces expresado como el producto de 2 con el mayor exponente (2), por 3 elevado al mayor exponente (3) por 5 elevado al mayor exponente (1):

$$mcm=2^2.\, 3^3.5= 540$$

Ejercicios
Hallar el mcm de los siguientes pares de números
a) 5 y 15
b) 7 y 8
c) 40 y 18

2. Números Enteros

Quedó planteado ya que los números naturales sirven para contar y ordenar. Sin embargo, hay situaciones que para ser descriptas correctamente requieren de otro tipo de números. Los números enteros negativos se usan en diversos contextos, por ejemplo, para expresar o calcular: S

** En geografía, profundidades o diferencias de altura:*

o *la capa más superficial de la estructura de la Tierra, llamada corteza terrestre, llega hasta los -30 km en el fondo oceánico;*

o *la diferencia de altura que hay desde la cima del o Aconcagua, que se halla a 6.959 metros sobre el nivel del mar, hasta el fondo de la laguna del Carbón, en la provincia de Santa Cruz, donde el altímetro marca 105 metros bajo el nivel del mar*

∗ Temperaturas bajo cero: el día más frío del año 2008 en Ushuaia fue el 16 de agosto, con una temperatura mínima de -5°C y una temperatura máxima de 7°C.

** En contabilidad, los números negativos significan deudas y los positivos haberes o activos poseídos.*

** Fechas en la antigüedad, años antes de Cristo: Platón, el más importante filósofo de la antigüedad, fue alumno de Sócrates y maestro de Aristóteles; nació en Grecia en el año 427 a.C. y murió en el año 347 a.C.; por lo tanto, vivió 80 años.*

2.1. Construcción de los números enteros

Para continuar el estudio de los números, consideremos N el conjunto de los números naturales y el cero, y pensemos en la siguiente situación. En el capítulo anterior, estudiamos operaciones de números naturales y vimos que dos números naturales se pueden sumar y se obtiene como resultado otro número natural; también se pueden multiplicar y el resultado es un número natural. Por ejemplo, $3+6 = 9 \in N$ y $3 \cdot 6 = 18 \in N$. Además, si quisiéramos restar uno de otro, por ejemplo, hacer 6 - 3 también se puede dentro del conjunto N, es decir $6 - 3 = 3 \in N$. Una situación cotidiana que refleja esta situación matemática es la siguiente: si Luis tiene 6 pesos, Marcos le puede pedir prestados 3 pesos y a Luis todavía le quedan 3. En cambio, si Luis tuviera sólo 3 pesos, Marcos no debería esperar que le preste 6 porque no tiene más de 3.

Es decir, ¿qué ocurre si queremos efectuar la operación de resta en el otro sentido, o sea, 3 - 6? ¿A 3 se le puede restar 5? Veremos enseguida que, en realidad, sí se puede efectuar esta operación, pero el resultado ya no es un número natural.

2.2. Propiedades

- ✓ Es un conjunto infinito totalmente ordenado por la relación de ≤ (menor o igual).
- ✓ No tiene primero ni último elemento.
- ✓ Todo número entero tiene un antecesor y un siguiente.
- ✓ Entre dos números enteros existe un número finito de números enteros, por lo tanto es un **conjunto discreto.**

Propiedad del número 0

✓ Elemento Neutro para la Suma: si lo sumamos con cualquier número se obtiene el mismo número.

Por ejemplo: $7 + 0 = 7$, $-4 + 0 = -4$

✓ Multiplicación por Cero: la multiplicación por cero siempre da como resultado cero.

Por ejemplo: $6 . 0 = 0$, $(-3) . 0 = 0$

✓ Potencia Cero: Se conviene definir la potencia de un número no nulo con exponente cero, igual a 1. Es decir, todo número elevado a la potencia 0, da como resultado 1.

Por ejemplo: $7^{o} = 1$ y $(-5)^{o} = 1$

Propiedad del número 1

- ✓ Elemento Neutro para la Multiplicación: si se lo multiplica por cualquier número se

Obtiene el mismo número; por ejemplo: 4 . 1 = 4 , (−9) .1 = −9 y 0 .1 = 0

2.3. Valor absoluto

Es el valor numérico sin tener en cuenta el signo. Por ejemplo:

Número	Valor absoluto asociado
1	1
-20	20
3	3
-4	4

2.4. Resta

Es la operación inversa de la suma o adición. Los elementos de una resta son el minuendo (+), sustraendo (−) y la diferencia.

$$\begin{array}{rl} a & \text{Minuendo} \\ \underline{-\,b} & \text{Sustraendo} \\ c & \text{Diferencia} \end{array}$$

Cuando se restan 2 números enteros la diferencia lleva el signo del entero de mayor valor absoluto, como lo muestran los siguientes ejemplos:

9 – 7 = 2

¿Cuál es el resultado de 3 – 4?

Se realiza la operación 4 – 3 = 1, y al resultado se le antepone el signo negativo, debido a que el número de mayor valor absoluto es negativo, por tanto:

3 – 4 = −1

2.5. Suma y resta con signos de agrupación

Los signos de agrupación son ( ) paréntesis, [ ] cochetes , { } llaves.

Al realizar sumas y restas de números enteros que tienen signos de agrupación, primero es necesario eliminar dichos signos, para hacerlo se debe seguir el siguiente procedimiento:

Si a un signo de agrupación lo precede un signo positivo, el número entero que encierra conserva su signo. Cuando el signo delante del paréntesis no está explícitamente escrito, se asume que está precedido por un signo positivo.

Por ejemplo:

(3) se lee como +3.

¿Cuál es el resultado de (– 8) + (– 3)?

Puesto que ambos signos de agrupación están precedidos por signos positivos, entonces se suprimen y se realiza la operación para obtener el resultado:

$$(-8) + (-3) = -8 - 3 = -11$$

Ejemplo: Efectuar (+ 6) + (– 8)

Al estar precedidos por signos positivos, ambos enteros conservan su signo y se obtiene como resultado:

$$(+6) + (-8) = 6 - 8 = -2$$

Si un signo de agrupación es precedido por un signo negativo, entonces el entero que encierra cambia su signo:

Por ejemplo: Para resolver – (14) – (– 10)

Como a los signos de agrupación le anteceden signos negativos, entonces se deben cambiar los signos de los enteros y realizar la operación que resulta.

$$-(14)-(-10)=-14+10=-4$$

El resultado de la operación es – 4

¿Cuál es el resultado de $(-6)+(-3)-(-11)$?

Se aplican los procedimientos correspondientes a cada signo de agrupación y se procede a efectuar la operación con enteros:

$$(-6)+(-3)-(-11)=-6-3+11=-9+11=2$$

Para resolver $(6-8)+(5-2)$

Una forma de realizar la operación es efectuar las operaciones que encierran cada uno de los signos de agrupación:

$$(6-8)+(5-2)=(-2)+(3)=1$$

Para resolver $(8-3)-(-4+6)+(2-7-3)+5=$

$$=8-3+4-6+2-7-3+5$$

$$=8+4+2+5-3-6-7-3 \text{ ó } =(8+4+2+5)-(3+6+7+3)$$

$$=19-19=(19)-(19)$$

$$=0=19-19=0$$

¿Cuál es el resultado de $[(-8+6)-(-3-2)]+[4-(2-1)]$?

Se efectúan las operaciones contenidas en los paréntesis:

$$[(-8+6)-(-3-2)]+[4-(2-1)]=$$

$$=[(-2)-(-5)]+[4-(1)]$$

Se eliminan los paréntesis y se realizan las operaciones que encierran los corchetes:

$$=[-2+5]+[4-1]$$
$$=[3]+[3]$$

$$=3+3=6$$

Ejercicio

Calcular:

a) 3. (2 - 3) - 8 (5 + 1) =

b) 2.(3-4) - [4. (2+ 7) + 2. (4 + 3)]=

c) 2. (2 - 3 + 5) + 5. (4 + 1) – 7 (4 + 8)

2.6. Multiplicación

<u>Leyes de los signos</u>

1. El producto de dos números con signos iguales da como resultado un número positivo.

Ejemplos:

$(8).(5)=40$

$(-3).(-7)=21$

2. El producto de dos números con signos diferentes da como resultado un número negativo.
Ejemplos:

(– 6.) (4) = – 24

(9).(– 3) = – 27

En general, la aplicación simbólica de las leyes de los signos anteriores es:

(+) (+) = + (–) (–) = +

(–) (+) = – (+) (–) = –

Ejercicio:
1) Calcular (– 3).(– 4).(– 6)

Solución
Se realiza el producto de (– 3)(– 4) y el resultado, 12, se multiplica por – 6, entonces:
(– 3).(– 4).(– 6) = (12).(– 6) = – 72
Finalmente, el resultado de la multiplicación es – 72

2) ¿Cuál es el resultado de (3). (– 5). (– 2). (4)?

Solución
Se multiplican 3 por – 5 y – 2 por 4, los resultados se vuelven a multiplicar para obtener el resultado final de la operación.
= (3). (– 5). (– 2). (4)
= (–15). (– 8) = 120
Por tanto, el producto es 120. Esta es sólo una de las formas encontrar la solución. Se pueden ir resolviendo los productos que componen el cálculo en la manera en que se prefiera, siempre que se respeten las leyes de los signos. Otra opción para el mismo ejercicio, sería, por ejemplo multiplicar en un primer paso los dos paréntesis con cantidades negativas:
(3). (– 5). (– 2). (4)= (3). (10). 4= 30. 4= 120

2.7. Multiplicación con signos de agrupación
Para simplificar y obtener el resultado de una operación con signos de agrupación, hay que suprimir éstos –resolviendo las operaciones que hay en su interior- y multiplicar los números del interior por el número o signo que los anteceden.
Después se agrupan y suman los números del mismo signo y los resultados se restan.
Ejemplos:
1) Efectúa 3. (4 – 2) – 5. (1 – 4) – (8 + 9) =
Opción 1: aplicamos propiedad distributiva y suprimimos paréntesis

3. (4 – 2) – 5. (1 – 4) – (8 + 9) = 3.4 +3.(-2)-5.1 -5.(-4) -8 -9

= 12 – 6 – 5 + 20 – 8 – 9. Se agrupan y suman los números con el mismo signo, los resultados se restan:
= 12 + 20 – 6 – 5 – 8 – 9
= 32 – 28
= 4

Opción 2: resolvemos los paréntesis y luego los productos del resultado por los números que los preceden (con su correspondiente signo):
3. (4 – 2) – 5. (1 – 4) – (8 + 9) = 3. (2) - 5. (-3) –(17)

$=6 + 15 - 17$
$=4$

2) ¿Cuál es el resultado de $6 – 4. \{2 – 5. (4 – 3) + 3 .(3 – 2)\}$?
Cuando hay más de un signo de agrupación (como en este caso, en el que tenemos paréntesis y llaves), se resuelven primero los signos internos (siendo que hay una agrupación –dada por los paréntesis- dentro de otra –dada por las llaves-, se suprimen en primera instancia las que se encuentran dentro y luego se resuelve la operación dada por los términos agrupados por la llave). En este caso, primero se suprimen los paréntesis y los números se multiplican por los números que les anteceden:

$6 – 4. \{2 – 5. (4 – 3) + 3 .(3 – 2) \} =$ Aplicando propiedad distributiva:
$6 – 4. \{2 – 5.(4) –5. (-3) +3. (3) +3. (–2)\}$
$= 6 – 4. \{2 – 20 + 15 + 9 – 6\}$

Ahora, se aplica la propiedad distributiva al multiplicar por $–4$,

$= 6 – 4. \{2\} –4.\{- 20\} – 4. \{ 15\} – 4. \{ 9\} – 4. \{– 6\}$
$= 6 – 8 + 80 – 60 – 36 + 24$

Por último, se realiza la operación al agrupar signos iguales y los resultados obtenidos se restan:

$= 6 + 80 + 24 – 8 – 60 – 36$ **ó** $= (6 + 80 + 24) – (8 + 60 + 36)$
$= 110 – 104 = 110 - 104$
$= 6 = 6$

Ejercicios

Calcular:

a) $3. (2 - 3) . (-2).(-2 +1) - 8 (5 + 1) =$

b) $(-2) .(3-4) - [4. (2+ 7) + 2. (4 + 3)]=$

c) $[2. (2 - 3 + 5) + 5. (4 + 1)] – 7. (4 + 8). (-5)$.

2.8. División

Ampliando lo visto para números naturales:

Si a y b son números enteros, la división de a por b, siendo b un número entero diferente de cero, consiste en encontrar a los números enteros c y d tales que:
$d . b + c = a$ para todo $a > b$ y $b < c$.

Ejemplos
1) En la división de 25 en 4, el cociente es 6 y el resto, 1 ya que:
$25 = 4 .6 + 1$
2) En la división de 36 en 9, el cociente es 4 y el resto es 0, ya que:
$36 = 9 . 4 + 0$

Cuando en una división el resto es igual a 0, entonces se dice que la **división es exacta**.

La división entera es una operación que sólo tiene sentido en el conjunto de los números enteros. Ahora bien, si bien el cociente entre 25 y 4 es 6, no es cierto que 4 por 6 sea igual a 25. Así como con los naturales no podemos resolver el problema de hallar el número que sumado a 5 de como resultado 3, en el conjunto de los enteros no es posible resolver problemas como hallar el número que multiplicado por 6 sea igual a 25.

Para encontrar la solución a esta operación necesitamos trascender el conjunto de los números enteros, es decir ampliarlo y esa ampliación va a dar por resultado la aparición del **conjunto de los números racionales** en el que no sólo 25 dividido en 4 es posible resolver sino cualquier división en la que:

- ✓ El dividendo (a) no es múltiplo del divisor (b)
- ✓ El dividendo (a) es menor que el divisor (b)

casos éstos que no tienen solución en el conjunto de los números enteros **Z**.
Por ejemplo: 25 : 4 ó 3 : 7

3. Números Racionales

Este conjunto numérico resulta de las sucesivas ampliaciones que se vienen produciendo desde los naturales a los enteros y de los enteros a los racionales, para que la división sea siempre posible.
Un número racional es aquel que puede ser expresado como una fracción.
Cabe entonces la pregunta:
¿ 2 es un número racional? ¿ y -3? ¿y 0?
Veamos:
Si cada uno de estos números tiene la posibilidad de escribirse como fracción, entonces son números racionales:

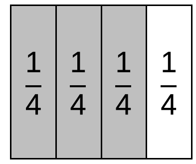
$2 = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{10}{5} = \ldots$; $-3 = -\frac{6}{2} = -\frac{9}{3} = -\frac{12}{4} = \ldots$; $0 = \frac{0}{2} = \frac{0}{3} = \frac{0}{4} = \frac{0}{5} = \ldots$

Un número natural como 2, tiene la posibilidad de ser escrito como una fracción.
Un número entero como -3, también tiene la posibilidad de ser escrito como una fracción. Además el 0 es otro número entero que puede escribirse como una fracción. Por lo tanto, será que los números naturales y los enteros son también racionales?

- ✓ Si a y b son dos números naturales cualesquiera, entonces $\frac{a}{b}$ es un número racional.
- ✓ Si a y b son dos números enteros cualesquiera, entonces $\frac{a}{b}$ es un número racional.
- ✓ Si n es cualquier número entero, exceptuando el 0, entonces $\frac{0}{n}$ es un número racional.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{Naturales } \mathbf{N} \\ \text{Cero } \mathbf{0} \\ \text{Negativos } \mathbf{Z}^{-}\end{array}\right\}\ \text{Enteros } \mathbf{Z} \\ \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{Fraccionarios}\end{array}\right\}\ \text{Racionales } \mathbf{Q}$$

La fracción $\frac{3}{4}$, indica que la unidad se divide en 4 partes iguales, de las cuales se toman únicamente 3, la representación gráfica de esta fracción es:

$\frac{3}{4} =$ 

3.1. Propiedades

- ✓ Es un conjunto totalmente ordenado por la relación ≤.
- ✓ No tiene primer ni último elemento.
- ✓ Entre dos números racionales existen infinitos racionales, esto determina que Q sea un conjunto

Denso o **continuo**. Como consecuencia, ningún racional tiene antecesor, ni sucesor.

3.2. Números decimales:

Un número decimal, por definición, es la expresión de un número no entero, que tiene una parte decimal. Es decir, que cada número decimal tiene una parte entera y una parte decimal que va separada por una coma, y son una manera particular de escribir las fracciones como resultado de un cociente.

Ejemplos

1) La fracción $\frac{3}{4}$ puede escribirse como el resultado de hacer la división 3÷4. Esto será 0,75, donde la parte entera es "0" y la parte decimal es el número que escrito después de la coma. En este caso, como la cantidad de decimales después de la coma es finita y los escribimos a todos en el resultado, hablamos de un decimal exacto.

2) La fracción $\frac{4}{3}$ puede escribirse como el resultado de hacer la división 4÷3. Esto será 1,3333333…. (los puntos suspensivos indican que el número continúa) , donde la parte entera es "1" y la parte decimal es el número que escrito después de la coma. En este caso, como la cantidad de decimales después de la coma es infinita y no podemos escribirlos a todos en el resultado, hablamos de un decimal inexacto.

3.3. Fracciones equivalentes

Son aquellas que se expresan de manera diferente, pero representan la misma cantidad. Para averiguar si 2 fracciones son equivalentes se efectúa la multiplicación del numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda, y el resultado debe ser igual a la multiplicación del denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda.

$\frac{3}{5} = \frac{9}{15}$ Son fracciones equivalentes, ya que 3.15 = 5.9
45 = 45

También, al calcular el cociente para expresar como números decimales, ambas fracciones dan, naturalmente, el mismo resultado.

3÷5= 9÷15 = 0.6

Ejercicio

Decir si las siguientes fracciones son equivalentes y justificar con cálculos

a) $\frac{1}{3}$ y $\frac{28}{84}$ c) $\frac{27}{6}$ y $\frac{9}{3}$

b) $\frac{5}{3}$ y $\frac{35}{20}$ d) $\frac{144}{54}$ y $\frac{8}{3}$

3.3.1. Amplificación de una fracción

El valor de una fracción no se altera al multiplicar su numerador y denominador por un mismo número.

$$\frac{6}{7} = \frac{6 \times 2}{7 \times 2} = \frac{12}{14}$$

3.3.2. Simplificación de una fracción

El valor de una fracción no se altera cuando al numerador y denominador se les divide entre el mismo número. A este procedimiento se le conoce como “simplificación de una fracción”.

$$\frac{9}{6} = \frac{9 \div 3}{6 \div 3} = \frac{3}{2}$$

3.4 Suma y resta con igual denominador

Se suman o restan los numeradores y se escribe el denominador en común. Se simplifica el resultado siempre que sea posible.

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3+2+1}{4} = \frac{6}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{5} + \frac{4}{5} - 2\,\frac{1}{5} = \frac{3+4-2}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

Ejercicio

Realice las siguientes sumas

a) $\frac{1}{3} + \frac{28}{3}$ c) $\frac{27}{2} + \frac{5}{2}$

b) $\frac{4}{5} + \frac{35}{5}$ d) $\frac{14}{7} + \frac{8}{7}$

3.5. Suma y resta con diferente denominador

Se busca el mínimo común múltiplo (m.c.m) de los denominadores, también conocido como común denominador, éste se divide entre cada uno de los denominadores de las fracciones y los resultados se multiplican por su correspondiente numerador. Los números que resultan se suman o se restan para obtener el resultado final.

Ejemplo:

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{6}$$

Para poder hacer la cuenta entre numeradores (como lo explicado en la sección anterior), debo tener a las tres fracciones escritas con el mismo numerador. Se calcula el mínimo común múltiplo de los tres denominadores: 2, 3 y 6. Y ese mcm será el denominador con el que se expresen las tres fracciones. Para esto se expresan los tres números como sus factores primos:

$2 = 2^1$
$3 = 3^1$
$6 = 2^1 . 3^1$

Se hace el producto de los factores comunes (en este caso son todos divisibles por 2 y 3) elevados a la máxima potencia (en este caso las máximas potencia a la que se encuentran elevadas los factores primos coinciden con el número 1).

Entonces mcm (común denominador) = 6

Las tres fracciones estarán escritas con denominador =6. Para que el cálculo que estamos haciendo siga siendo el mismo, tengo que expresar todas las fracciones como fracciones equivalentes a aquellas que indica el enunciadao, con denominador 6:

$$\frac{3}{2} = \frac{9}{6}$$

Para llegar a esta igualdad, sabiendo que el denominador debe ser 6, se busca el número por el cual debe multiplicarse al denominador inicial para dar 6 como resultado y, por amplificación de la fracción (sección 3.3.1) se multiplica al numerador por el mismo número. Esto es:

$$\frac{3}{2} = \frac{3.(3)}{2.(3)} = \frac{9}{6}$$

Se procede de la misma manera con la segunda fracción:

$$\frac{1}{3} = \frac{1.(2)}{3.(2)} = \frac{2}{6}$$

En el caso de la tercera, no es necesario encontrar la equivalente, porque la fracción original ya tiene denominador 6 (o lo que es lo mismo, para llegar a la fracción deseada basta con multiplicar numerador y denominador por 1).

Ahora que tenemos las tres fracciones con el mismo denominador, procedemos como sabemos, con fracciones de igual denominador (sección 3.4) operando con los numeradores directamente

$$\frac{9}{6} + \frac{2}{6} + \frac{2}{6} = \frac{9+2+2}{6} = \frac{13}{6}$$

Resumiendo todo el procedimiento en un renglón

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{6} = \frac{3.(3) + 1.(2) + 2.(1)}{6} = \frac{9+2+2}{2} = \frac{13}{6}$$

Ejercicio
Realice las siguientes sumas

a) $\frac{1}{4} + \frac{3}{2}$

b) $\frac{4}{3} + \frac{35}{5}$

c) $\frac{7}{2} + \frac{5}{4} + \frac{2}{5}$

d) $\frac{14}{3} + \frac{8}{7} - \frac{3}{4}$

3.6. Multiplicación

Para realizar esta operación se multiplican los numeradores y los denominadores.

Ejemplo:

$$\frac{2}{3} \times -\frac{4}{5} = \frac{2.(-4)}{3.(5)} = -\frac{8}{15}$$

Notar que cuando la fracción tiene signo negativo, al momento de multiplicar el signo se le adjudica al numerador o al denominador, nunca a los dos en simultáneo.

Ejercicio

Realice los siguientes productos

a) $\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2}$

b) $\frac{4}{7} \cdot \frac{15}{5}$

c) $\frac{7}{2} \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) \cdot \frac{2}{3}$

d) $\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{8}{7}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)$

3.7. División

* Se multiplica el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda fracción, el producto es el numerador de la fracción resultante.

* Se multiplica el denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda fracción, el producto es el denominador de la fracción resultante.

Ejemplo:

$\frac{5}{3} \div \frac{8}{5} =$

$\frac{5}{3} \div \frac{8}{5} = \frac{5.\,5}{3.\,8} = \frac{25}{24}$

Otra forma de plantear el mismo problema es escribir la división de fracciones como una fracción. El numerador del resultado estará dado por el producto de los “extremos” (numerador de la fracción que está en el numerador y denominador de la fracción que está como denominador). El denominador del resultado estará dado por el producto de los “medios” (denominador de la fracción que está en el numerador y numerador de la fracción que está como denominador).

Considerando el ejemplo con el que venimos trabajando:

$\frac{5}{3} \div \frac{8}{5} =$ $\Longrightarrow$ Escribimos la división como un cociente fraccionario:

$= \dfrac{\frac{5}{3}}{\underline{8}}$ Se identifican los medios y los extremos y se multiplican, colocando el producto de los extremos en el numerador y el producto de los medios en el denominador

$\dfrac{\frac{5}{3}}{\underline{8}}$ Medios Extremos $\Longrightarrow$

5 5

$= \frac{5.\,5}{3.\,8} = \frac{25}{24}$

Ejercicio

Realice las siguientes divisiones

a) $\frac{1}{4} \div \frac{3}{2}$

b) $\frac{4}{7} \div \frac{15}{5}$

c) $\left(-\frac{5}{4}\right) \div \frac{2}{3}$

d) $\left(-\frac{8}{7}\right) \div \left(-\frac{3}{4}\right)$

3.8. Operaciones con signos de agrupación

Se realizan las operaciones que se encuentran dentro de un signo de agrupación, posteriormente éstos se suprimen, como se muestra en el siguiente ejemplo:

$$2.\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\right) + 3.\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$$

se resuelve

Se saca común denominador para resolver las restas de los paréntesis

$$2.\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\right) + 3.\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) = 2.\left(\frac{5.(1)-1.(2)}{4}\right) + 3.\left(\frac{1.(3)-1.(2)}{6}\right)$$

$$= 2.\left(\frac{5-2}{4}\right) + 3.\left(\frac{3-2}{6}\right) = 2.\left(\frac{3}{4}\right) + 3.\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$= \left(\frac{6}{4}\right) + \left(\frac{3}{6}\right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Ejercicio

Realice las siguientes operaciones

a) $2.\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\right)$

b) $3.\left(\frac{4}{5}+\frac{3}{2}\right) - 5 \div \left(\frac{1}{4}-1\right)$

c) $\left[5.\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\right) + \frac{5}{12}\right] \div \frac{4}{3}$

3.9. Potenciación y radicación de fracciones

3.9.1. Potenciación: Es la operación en la cual la cantidad llamada base se debe multiplicar por ella misma las veces que lo indique el exponente. De lo anterior se define:

$$a^n = \underbrace{a \,.\, a \,.\, a \,.\, a.\, a\ldots\ldots}_{\text{n veces}}$$

donde: **a** es la base y **n** el exponente

Cuando un número negativo se eleva a una potencia par, el resultado es positivo, pero si se eleva a una potencia impar el resultado es negativo.

Cuando la potencia es negativa:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Por ejemplo:

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2}$$

Ejercicio
Calcule las siguientes potencias

a) 2^3 c) 3^7
b) 4^5 d) 5^{-6}

Leyes de los exponentes

Ley	Ejemplo
$a^m \,.\, a^n = a^{m+n}$	$2^3 \,.\, 2^2 = 2^{3+2} = 2^5$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$
$a^0 = 1\ (a \neq 0)$	$7^0 = 1$
$(a^m)^n = a^{m.n}$	$(4^3)^2 = 4^{3.2} = 4^6$
$(a.b)^n = a^n.b^n$	$(2.3.5)^2 = 2^2.3^2.5^2$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$

3.9.2. Radicación: Es la inversa de la potenciación Operación que permite hallar un valor llamado raíz (b) que multiplicado por sí mismo tantas veces como lo indica el índice (n) , dé el valor que se encuentra dentro del radical, el cual recibe el nombre de radicando (a).

$$b = \sqrt[n]{a}$$

Para el caso más general en el que el radicando esté elevado a una potencia se define:

$$b = \sqrt[n]{c^m} = c^{\frac{m}{n}}$$

Donde el radicando es c^m, en el cual **c** es la base, **m** el exponente y **n** el índice.

Ejemplo

$$\sqrt[3]{8^2} = 8^{\frac{2}{3}}$$

Propiedades:

- ✓ Distributividad con respeto al producto $\sqrt[n]{a.b.c} = (a.b.c)^{\frac{1}{n}} = (a)^{\frac{1}{n}}.(b)^{\frac{1}{n}}.(c)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}\,.\sqrt[n]{b}\,.\sqrt[n]{c}$
- ✓ Distributividad con respeto al cociente $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{(a)^{\frac{1}{n}}}{(b)^{\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
- ✓ Raíz de una raíz $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = (a)^{\frac{1}{n.m}} = \sqrt[n.m]{a}$

4. Números Irracionales

Un **número irracional** es un número que no puede ser escrito como una relación (o fracción). En forma decimal, nunca termina o se repite. Los antiguos griegos descubrieron que no todos los números son racionales; hay ecuaciones que no pueden ser resueltas usando relaciones de enteros.
¿Qué son números irracionales? Los números irracionales tienen como definición que son números que poseen infinitas cifras decimales no periódicas (o sea, repetitivas), que por lo tanto no pueden ser expresados como fracciones.
La primera ecuación a ser estudiada fue x= $\sqrt{2}$. Qué número por sí mismo es igual a 2?

La √ es alrededor de 1.414, porque $1.414^2 = 1.999396$, que está cerca de 2. Pero Usted nunca lo hallará elevando al cuadrado una fracción (o decimal terminante). La raíz cuadrada de 2 es un número irracional, que significa que su decimal equivalente continúa por siempre, con ningún patrón repetitiva
Otros números irracionales famosos son
La Relación Dorada, un número con gran importancia en la biología:

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

π (pi), la relación de la circunferencia de un círculo a su diámetro: $\boldsymbol{\pi} = 3.14159265358979\ldots$

5. Números Reales

El Conjunto de los números reales es el conjunto que contiene a todos los números racionales y a todos los números irracionales.

5.1. Radicales

Ahondando lo mencionado para radicación de fracciones, veremos un poco más en detalle este concepto aplicado a cualquier forma de a. Un radical es una expresión de la forma $\sqrt[n]{a^m}$, en la que **n** es natural y **a** es real; con tal que cuando ***a*** sea negativo, ***n*** ha de ser impar. Las raíces pares de números negativos no pertenecen al conjunto de los números reales ya que son cantidades imaginarias, las raíces impares de números negativos son negativas.
Como se mencionó en la sección 3.9.2 para números racionales, también se aplica a los reales en general: se puede expresar un radical en forma de potencia:

$$\sqrt[n]{a^m = (a)^{\frac{m}{n}}}$$

6. Razones y proporciones

6.1. Cantidades proporcionales

Si se tienen 2 cantidades tales que al multiplicar una de ellas por un número la otra queda multiplicada por el mismo número, o al dividir una de ellas la otra queda dividida por el mismo número, se dice que las cantidades son directamente proporcionales (uno aumenta en la misma “medida “o, más correctamente dicho, proporción que el otro). Si se tienen dos cantidades tales que al multiplicarla por un número, la otra queda dividida por el mismo número, se dice que las cantidades son inversamente proporcionales (una disminuye en la medida en la que la otra aumenta)
Ejemplos
1) Si con \$20 puedo comprar tres manzanas, entonces y tengo \$100, puedo comprar 15 (estas cantidades –el dinero y las manzanas- son directamente proporcionales, en este caso al aumentar 5 veces uno, el otro aumenta la misma cantidad de veces).
2) Si 18 hombres construyen una barda en 12 días, entonces 6 hombres construirán la misma barda en el triple de tiempo, es decir, 36 días. Al dividir el número de hombres por 3, el número de días quedó multiplicado por 3, por consiguiente las cantidades son inversamente proporcionales.

6.2. Razón.

Es el cociente entre 2 cantidades, donde el numerador recibe el nombre de antecedente y el denominador de consecuente.

Para las cantidades a, b en la razón **= K** con b ≠ 0, **a** recibe el nombre de antecedente y **b** el de consecuente donde **K** es la constante de proporcionalidad.

$$k = \frac{a}{b}$$

Ejemplo:
En la razón

$$\frac{7}{4} = 1{,}75$$

7 es el antecedente y 4 es el consecuente, como resultado 1,75 es la constante de proporcionalidad.

6.3. Proporción
Es la igualdad entre 2 razones

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Con $b \neq 0$ y $d \neq 0$ y ambas razones tienen la misma constante de proporcionalidad **k = k.** Se lee: "**a** es a **b** como **c** es a **d**"

Ejemplo
3 es a 6 como 8 es a 16, se escribe

$$\frac{3}{6} = \frac{8}{16}$$

Al simplificar cada fracción se obtiene la razón de proporcionalidad $k = \frac{1}{2}$ o bien (resolviendo el cociente) 0,5 = 0,5 que es la constante de proporcionalidad

6.4. Propiedad fundamental de las proporciones
Dada una proporción

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

se llaman EXTREMOS al numerador de la primera razón (*a*) y el denominador de la segunda (*d*) , y se llaman MEDIOS al denominador de la primera razón (*b*) y el numerador de la segunda (*c*).
La Propiedad fundamental de las proporciones dice que en toda proporción el producto de los extremos *a.d* es igual al producto de los medios *b.c*. (ver que la misma relación se cumple en determinación de fracciones equivalentes, sección 3.3)

6.5. Regla de tres simple
Directa: Es la operación que se utiliza para encontrar el cuarto término (el denominador de la segunda razón) en una proporción directa. A la parte que contiene los datos conocidos se le llama supuesto y a la que contiene el dato no conocido se le llama pregunta.

Propiedad: el producto entre primer término del supuesto con el segundo término de la pregunta es igual al producto entre el segundo término del supuesto con el primer término la pregunta.
a ------------------- b (supuesto)
c ------------------- d (pregunta) es igual **a . d = c . d**

Si "d" es el término no conocido, se puede obtener su valor, por lo tanto, a partir de la expresión $d = \frac{c.d}{a}$

Ejemplo:

El precio de 25 latas de aceite es de $248, ¿cuántas latas se podrán comprar con $1240?

$248 --------------------------- 25 latas (supuesto)
$1240 ----------------------------- X latas (pregunta)

Es igual: $1240. 25 latas = $248. X latas

Despejamos X latas = $\dfrac{25 \text{ latas} \cdot \$1240}{\$248}$

Ejercicios

a) Si un grupo de 15 personas consumen 45 litros de agua por día en una caminata, cuántos litros deberemos llevar si van 20 personas y caminan un día?

b) Si las 20 personas del inciso anterior realizaron una caminata de 3 días, cuántos litros consumirán?

c) Si un puma necesita un territorio mínimo de 10 km^2, cuánta será el área necesaria del entorno en el que vivan 25 pumas?

d) Si tardo 24 horas en escalar 1000 mts, cuánto tardaré en hacer cumbre en una montaña de 3500 mts?

7. Notación científica

La notación científica se utiliza para expresar cantidades en función de potencias de 10 y por lo regular se usa para cantidades muy grandes o muy pequeñas. Las potencias indican el número de ceros que se escriben en la forma desarrollada. Si la potencia es positiva, la cantidad que denote corresponderán al número de ceros escritos a la derecha del 1. Si la potencia es negativa, la cantidad que denote corresponderán al número de ceros escritos a la izquierda del 1. En este caso el primer cero debe tener a su derecha el símbolo decimal (coma "," o punto"." según el sistema que se utilice, en este cuadernillo utilizaremos la coma)

Potencias de 10

$0{,}1 = 10^{-1}$	$10=10^1$
$0{,}01= 10^{-2}$	$100= 10^2$
$0{,}001= 10^{-3}$	$1000= 10^3$
$0{,}0001= 10^{-4}$	$10000= 10^4$
$0{,}00001= 10^{-5}$	$100000=10^5$

Para expresar una cantidad en notación científica la coma se escribe a la derecha del primer número distinto de cero. El número de lugares que recorre la coma (desde la expresión desarrollada hasta la notación científica) es el exponente de la base 10.
Ejemplo:
1) La longitud de una bacteria es de 0,000052 m, expresa esta longitud en notación científica.
Para expresar la longitud de una bacteria en notación científica se escribe el número con la coma a la derecha del primer número distinto de cero (es decir 000005,2), la cantidad de lugares que se desplazó la coma hacia la derecha es igual a 5, por lo que el exponente de la base 10 será -5 (esto indica que el primer número después de la coma, aparecerá en la quinta posición decimal en la forma desarrollada). Entonces la expresión será: $000005{,}2 \times 10^{-5}$, como los ceros a la izquierda del 5 no varían la cantidad (de ahí la conocida expresión "cero a la izquierda"), la forma correcta de escribir este número será: $5{,}2 \times 10^{-5}$
Por lo tanto, la longitud de la bacteria expresada en notación científica es:
$0{,}000052 \text{ m} = 5{,}2 \times 10^{-5} \text{ m}$
2) La velocidad de la luz es 30000000000 cm/s, expresar esta velocidad en notación científica.
Se escribe el número con la coma a la derecha del primer número distinto de cero (3,0000000000). La cantidad de lugares que se desplazó la coma desde el número original al obtenido para la expresión en notación científica es 10

(se considera que la coma parte desde la derecha del último cero, ya que 30000000000 es un número entero y la parte decimal estaría a la derecha del mismo). El exponente de la base 10, entonces, será 10 (esto indica que para llegar a la parte decimal en la forma desarrollada, deberán escribirse 10 ceros después del número que tiene la coma a la derecha). Entonces la expresión será $3{,}0000000000 \times 10^{10}$. Debido los decimales a la derecha de la coma son todos cero, pueden no escribirse (por ejemplo: la cantidad 50 es la misma que 50,0 y que 50,00) la forma correcta de expresar este número será: 3×10^{10}.
Por lo tanto, la velocidad de la luz expresada en notación científica es:
30000000000 cm/s = 3×10^{10} cm/s

Notar que, cuando el número escrito en la forma desarrollada es menor que uno, el exponente escrito en notación científica es negativo. Cuando el número escrito en la forma desarrollada es mayor que diez, el exponente escrito en notación científica es positivo.

Ejercicios
Expresar utilizando notación científica los siguientes números
a) 0,0003
b) 350
c) 285000000000000
d) 0,00000000000000007

8. Escritura en forma desarrollada.

El número $\mathbf{a \times 10^n}$ se expresa en forma desarrollada de las siguientes formas

* Si el exponente **n** es positivo, entonces indica el número de posiciones que se debe recorrer el signo decimal a la derecha y los lugares que no tengan cifra (número distinto de cero) son ocupados por ceros.

Ejemplo: Escribe en su forma desarrollada $25{,}36 \times 10^6$

El exponente 6 indica el número de lugares que se recorren hacia la derecha y los lugares que no tengan cifra serán ocupados por ceros.

2 5 3 6 , (la coma se traslada a la sexta posición a la derecha de donde estaba originalmente)

2 5 3 6 0 0 0 0, (los lugares que quedan libres a la derecha de la coma se completan con ceros.

Por lo tanto; $25{,}36 \times 10^6$= 25 360 000

* Si el exponente n es negativo, entonces indica el número de posiciones que se debe recorrer el punto decimal a la izquierda y los lugares que no tengan cifra son ocupados por ceros.

Ejemplo: Expresa en notación desarrollada $-7{,}18 \times 10^{-4}$

En este número, el punto decimal se recorre 4 lugares hacia la izquierda.

, -7 1 8 (la coma se traslada a la cuarta posición a la izquierda de donde estaba originalmente)

- 0 , 0 0 0 7 1 8 (los lugares que quedan libres a la derecha de la coma se completan con ceros y se coloca un cero a la izquierda de la coma para indicar que no hay parte entera en el número)

Por lo tanto $-7{,}18 \times 10^{-4} = -0{,}000718$. Notar que el signo del número no tiene influencia en la posición de la coma y se mantiene escrito explícitamente en ambas formas: notación científica y desarrollada.

Ejemplos
a) $-50000 = -5 \times 10^{4}$
b)$-0{,}002 = -2\text{x}10^{-3}$

Ejercicios
Expresar en se forma desarrollada los siguientes números
a) 2×10^{3}
b) 3×10^{-5}
c) $2{,}34 \times 10^{-8}$
d) -1.5×10^{6}

9. Ecuaciones y despeje de variables.

Antes de abordar el tema, propiamente dicho, de despeje de variables, refrescaremos algunos conceptos importantes para el tema: ¿Qué significan los términos: variable, constante, exponente, radical? ¿Qué se entiende por ecuación o fórmula?
¿A que se llama despejar una variable de una ecuación o fórmula?

9.1. Ecuaciones
Una ecuación es una igualdad que contiene una o más incógnitas. En una ecuación existen cantidades desconocidas (incógnitas), que en general se designan por letras minúsculas de la parte final del alfabeto: x, y, z y cantidades conocidas (coeficientes), que pueden designarse por letras minúsculas iniciales del alfabeto: a, b, c. Entonces, una ecuación está conformada por dos miembros: el primero, una suma algebraica de términos antes de una igualdad y luego de ella, el segundo miembro, que también consta de otra suma algebraica de términos. En dicha suma, pueden existir términos que contengan a la incógnita acompañada de un coeficiente y de términos independientes (Valores constantes que no contienen a la incógnita). Por ejemplo:

Términos

$$\underbrace{\underbrace{3X \;\; -2}_{\text{1er Miembro}} \;=\; \underbrace{\frac{5}{2} \;\; -4X}_{\text{2do Miembro}}}_{\text{Ecuación}}$$

Igualdad

Donde

Coeficientes

Donde $3X \;\; -4X$ $\quad$ **-2** y **5** son términos independientes

2

Variable o Incógnita

En el caso de las ecuaciones con una incógnita, se catalogan según el exponente más alto de la incógnita.
$2x + 4 = 10$ es una ecuación lineal o de primer grado (porque la incógnita está elevada el exponente uno)
$2x^2 + x + 5 = 9$ es una ecuación cuadrática o de segundo grado (porque la el mayor exponente al que está elevado la incógnita es dos)
$3x^3 + 5x^2 – 2x + 1 = 8$ es una ecuación de tercer grado.
En esta guía trabajaremos las ecuaciones de primer grado

9.1.1. Ecuaciones lineales o de Primer Grado de una incógnita
Por definición, Sean **a, b y c** constantes reales con $a \neq 0$, Se llama ecuación lineal o de primer grado con una incógnita a toda ecuación de la forma **$a.x + b = c$;** cuyo valor de ***x*** es el conjunto solución de dicha ecuación.

9.1.1.1 Procedimiento para resolver ecuaciones lineales de una incógnita.
Resolver significa, encontrar el valor de la incógnita que satisfaga la ecuación.

Reglas generales para despejar expresiones algebraicas:

1.- Lo que está sumando pasa restando.
2.- Lo que está restando pasa sumando
3.- Lo que está multiplicando pasa dividiendo
4.- Lo que está dividiendo pasa multiplicando
5.- Si está con exponente pasa con raíz.

Una forma general para resolver las ecuaciones lineales de una incógnita es el siguiente:

1. Elimine todas las fracciones multiplicando cada lado por el mínimo común denominador.
2. Resuelva las operaciones dentro de los paréntesis, para suprimirlos.
3. Simplifique los términos semejantes, usando la propiedad aditiva de la igualdad (es decir, agrupe en un lado de la igualdad los términos independientes y del otro todos los que estén multiplicando a la incógnita, y resuelva las operaciones sumas y restas entre ellos) para lograr que la ecuación tenga la forma: $ax = b$. Recordar que los términos independientes se suman/restan entre ellos, mientras que los términos con conformados por variables, sólo pueden sumarse/restarse con otros términos que posean la misma variable. Tener en cuenta que cuando se "pasa" de un lado al otro los términos que estaban sumando pasan a restar y viceversa.
4. Despejar la variable mediante la propiedad multiplicativa de la igualdad.
TODOS los coeficientes que acompañan la incógnita a despejar pasan al otro lado a realizar la operación contraria: si estaban dividiendo pasan a multiplicar y viceversa. (ATENCION: En este caso NUNCA se cambia de signo a las cantidades que pasan al otro lado).
Si la variable queda negativa, SE multiplica por (-1) a AMBOS lados de la fórmula para volverla positiva (en la práctica es cambiarle el signo a TODOS los términos de la fórmula).
5. Si la variable queda elevada a alguna potencia (n), debe sacarse raíz (n) a AMBOS lados de la fórmula para eliminar la potencia
6. Verificar el resultado con la ecuación original
Para ello veremos algunos ejemplos:

a.- Resolver la siguiente ecuación: **$2x + 3 = 5$**

Solución
En este caso, no hay fracciones, así que el primer paso no es necesario. Primero se simplifican los términos semejantes usando la propiedad aditiva. El objetivo es eliminar todo término que acompañe a la incógnita o

variable, que en este caso es **X,** y para ello se le resta a ambos miembros el valor de 3 , o se le suma el valor de -3 (lo que es comúnmente expresado como “el tres que está sumando, pasa restando”):

$\mathbf{2x + 3 - 3 = 5 - 3 \Longrightarrow 2x = 5-3 \Longrightarrow 2x = 2}$

Seguidamente, se usa la propiedad multiplicativa, en otras palabras, se multiplica a ambos miembros por un número tal que el coeficiente por el que se está multiplicando a x sea igual a 1. En este caso, se multiplica por ½ a ambos lados de la igualdad (lo que es comúnmente expresado como “el dos que estaba multiplicando, pasa dividiendo”)

$\mathbf{2x \,.\, (1/2) = 2 \,.(1/2) \Longrightarrow x = 2/2 \Longrightarrow x = 1}$

Visto de otra forma (pero que proviene del procedimiento explicado arriba) se puede resolver esta sencilla ecuación lineal. Se dice que se puede trasladar del primer al segundo miembro el término independiente +3, que está sumando, hacerlo restando:

$\mathbf{2x + 3 = 5}$

$\Longrightarrow$ $\mathbf{2x = 5 - 3}$

$\Longrightarrow$ $\mathbf{2x = 2}$

Posteriormente, pasar al segundo miembro el coeficiente 2 que multiplica a la variable **X,** dividiendo**:**

$\Longrightarrow$ $\mathbf{x = 2/2}$

$\Longrightarrow$ $\mathbf{x = 1}$

Comprobación. En esta parte se sustituye el valor de **x** resultante en la ecuación original para revisar la igualdad:

$\mathbf{2(1) + 3 = 5 \Longrightarrow 5 = 5}$ ✔

b.- Resolver la siguiente ecuación: $\mathbf{\frac{10}{3} x = x + 6}$

Solución

Se multiplica a cada lado de la igualdad por el mínimo común denominador (el 2)

$\mathbf{\frac{10}{3} x.\, 3 = (x + 6).\, 3 \Longrightarrow 10.x = 3.x + 3.6 \Longrightarrow 10x = 3.x + 18}$

Se simplifican los términos semejantes usando la propiedad aditiva (se suma a ambos lados el término -3.x)

$\Longrightarrow$ $\mathbf{10x - 3x = 3x + 18 - 3x}$

$\Longrightarrow$ $\mathbf{7x = 18}$

Se usa propiedad multiplicativa para simplificar el coeficiente por el que está multiplicado la variable (es decir, se multiplica a ambos miembros por 1/7)

$\Longrightarrow$ $\mathbf{7x \,.\, (1/7) = 18.\, (1/7) \Longrightarrow x = 18/7}$

Otra forma de considerarlo para su resolución es:

El denominador del coeficiente del primer término del primer miembro que está dividiendo, pasa multiplicando a todo el segundo miembro

Aplicando propiedad distributiva

$\mathbf{\frac{10}{3} x = x + 6 \Longrightarrow 10\, x = (x + 6)\, .3 \Longrightarrow 10\, x = x.\, 3 + 6.\, 3 \Longrightarrow 10\, x = 3x + 18}$

3

El término 3x que está sumando en el segundo miembro, pasa al primero restando

$\Longrightarrow$ **$10x - 3x = 18$** $\Longrightarrow$ **$7x = 18$**

El coeficiente de la variable (7) que está multiplicando, pasa al segundo miembro dividiendo

$\Longrightarrow$ **$x = 18/7$**

Comprobación. Se obtiene:

$$\frac{10}{3}\left(\frac{18}{7}\right) = \frac{18}{7} + 6$$

En el primer miembro se multiplica numeradores entre sí y denominadores entre sí, y en el segundo miembro se busca común denominador (mcm) para realizar la suma. El mcm entre 7 y 1 es 7. Para que el número 6 del segundo miembro quede expresado como fracción equivalente con denominador 7, debe multiplicarse al numerador, por el mismo número que al denominador (esto es, se multiplica a ambos por 7)

$$\Longrightarrow \frac{180}{21} = \frac{18}{7} + \frac{6.(7)}{1.(7)} \Longrightarrow \frac{180}{21} = \frac{18}{7} + \frac{42}{7} \Longrightarrow \frac{180}{21} = \frac{18 + 42}{7} \Longrightarrow \frac{180}{21} = \frac{60}{7}$$

El primer miembro es una fracción simplificable (esto es, si numerador y denominador se dividen por un número entero, ambos dan números enteros; en este caso se dividen 180 y 21 por 3)

$$\frac{180 \div 3}{21 \div 3} = \frac{60}{7}$$

$$\frac{60}{7} = \frac{60}{7} \checkmark$$

c- Resolver la siguiente ecuación **$12 = -2\,(2.x - 6)$**

Solución: Ahora lo veremos de una forma más directa:
Primero, el -2 que está multiplicando al segundo miembro, se pasa dividiendo y se quitan los paréntesis en el segundo miembro (notar que pasa dividiendo con el signo negativo que le corresponde, ya que la operación mediante la cual “pasa” al otro miembro, no está determinada por el signo, si no por la multiplicación) :

$12 = -2\,(2.x - 6)$

$12.\,(-1/2) = (2x - 6)$ $\Longrightarrow$ **$-6 = 2x - 6$**

Mediante la propiedad aditiva, el término -6 que estaba restando, pasa al otro miembro sumando (en este caso, la operación involucrada en el pasaje al otro miembro –adición- está determinada por el signo):

$\Longrightarrow$ **$-6 + 6 = 2x$** $\Longrightarrow$ **$0 = 2x$**

Mediante la propiedad multiplicativa, el “2” que está multiplicando a la variable, pasa dividiendo:

$\Longrightarrow$ **$0\,(1/2) = x$** $\Longrightarrow$ **$0 = x$**

En la Comprobación:

$12 = -2\,(2.(0) - 6)$ **$12 = -2\,(0 - 6)$** $\Longrightarrow$ **$12 = -2(-6)$** $\Longrightarrow$ **$12 = 12$** ✔

d. Resolver la siguiente ecuación: $3.(2x - 4) + 3.(x + 1) = 9$

Solución:
Se quitan paréntesis en cada término del primer término, aplicando propiedad distributiva:

$\Longrightarrow$ **$3.2x – 3.4 + 3.x + 3.1 = 9$** $\Longrightarrow$ **$6x – 12 + 3x + 3 = 9$**

Se agrupan y suman términos semejantes (los independientes se suman/restan entre sí, y los que poseen variables se suman/restan entre sí)

$\Longrightarrow$ **$(6x + 3x) + (– 12+3) = 9$**

$\Longrightarrow$ **$9x - 9 = 9$** El 9 que restando está pasa sumando

$\Longrightarrow$ **$9x = 9 + 9$** El coeficiente de la variable, que está multiplicando, pasa dividiendo

$\Longrightarrow$ **$x = 18 / 9$** Simplificamos dividiendo numerador y denominador por 9

$\Longrightarrow$ **$x = (18 \div 9) / (9 \div 9)$** $\Longrightarrow$ **$x = 2/1$** $\Longrightarrow$ **$x = 2$**

En la Comprobación:
$3 .(2.2 -4) + 3. (2+1) = 9$
Primero se resuelve el paréntesis. Notar que, cuando tenemos un cálculo a realizar en el que se encuentra a resolver simultáneamente una multiplicación/división y una suma/resta (como sucede en (2.2-4): el paréntesis del primer término del primer miembro). Se resuelve primero el producto/división y a su resultado se lo somete a la suma/resta.

$\Longrightarrow$ **$3. (2.2 -4) + 3. (2+1) = 9$** $\Longrightarrow$ **$3.(4-4) + 3. (2+1) = 9$** $\Longrightarrow$ **$3.(0) + 3.(3) = 9$** $\Longrightarrow$ **$0 + 9 = 9$** $\Longrightarrow$ **$9 = 9$ ✔**

e.- Resolver la siguiente ecuación: $\dfrac{(x – 8)}{5} + \dfrac{x}{3} = \dfrac{8}{5}$

Solución
Acá observamos dos términos en el primer miembro y uno en el segundo.
Todos ellos poseen denominadores y no son iguales en todos los casos. Para eliminarlos y dejar la ecuación completamente lineal, trabajaremos con el primer término y procedemos a determinar el m.c.m. entre los denominadores de las dos fracciones (3 y 5), y que resulta ser 15. Para escribir ambos términos como fracciones de denominador 15, multiplicaremos a cada uno por el número que multiplicó a su denominador para obtenerse el valor de 15. Es decir, el primer término tiene un denominador igual a 5, y debe multiplicarse por 3 para dar 15; por lo tanto el numerador también será multiplicado por 3. En el segundo miembro multiplicaremos al numerador por 5, porque éste es el número por el cual debe multiplicarse a su numerador para dar 15:

$$\frac{3.(x-8)}{3.5} + \frac{5.\,x}{5.3} = \frac{8}{5} \Longrightarrow$$

Aplicamos propiedad distributiva en el numerador del primer término y agrupamos ambos términos del primer miembro.

$$\frac{3.(x)- 3.\,(8) + 5.\,x}{15} = \frac{8}{5} \Longrightarrow$$

El denominador del primer miembro pasa multiplicando al segundo

$$\mathbf{3.(x) - 3.(8) + 5.x = \frac{8}{5}.15 \Longrightarrow}$$

Resolviendo los productos y simplificando la fracción obtenida en el segundo término se eliminan los denominadores

$$\mathbf{3.(x) - 3.(8) + 5x = \frac{120}{5} \Longrightarrow 3.(x) - 3.(8) + 5x = \frac{120 \div 5}{5 \div 5} \Longrightarrow 3x - 24 + 5x = 24}$$

El término independiente del primer miembro pasa sumando y, una vez agrupados los términos semejantes, se suman/restan según corresponda.

$$\mathbf{\Longrightarrow 3x + 5x = 24 + 24 \Longrightarrow 8x = 48}$$

El coeficiente que está multiplicando a la incógnita (8) pasa dividiendo

$$\mathbf{\Longrightarrow x = 48/8 \Longrightarrow x = 6}$$

En la Comprobación

$$\mathbf{\frac{(6-8)}{5} + \frac{6}{3} = \frac{8}{5} = \frac{(-2)}{5} + \frac{6}{3} = \frac{8}{5}}$$

Sacamos común denominador y expresamos las fracciones con el denominador correspondiente

Simplificando

$$\mathbf{\frac{3(-2)}{3.5} + \frac{5.6}{5.3} = \frac{8}{5} \Longrightarrow \frac{(-6)+30}{15} = \frac{8}{5} \Longrightarrow \frac{24}{15} = \frac{8}{5} \Longrightarrow \frac{24 \div 3}{15 \div 3} = \frac{8}{5}} \checkmark$$

Ejercicios

Identificar los términos de estas ecuaciones y los coeficientes de aquellos que posean a la incógnita o variable:

a) $7/6.w + 6.(w+1) = 1$
b) $z + 5.(5 - z) - 5 = 5$

Las ecuaciones pueden ser redactadas completamente por letras que son a su vez términos independientes que poseen valores arbitrarios, según la necesidad. Acá se muestran unos casos:

1) Determinar **A** en la ecuación **(A+B)/C = B + D**

Solución

Estas expresiones se tratan iguales que las anteriores:

Al observar la ecuación, la letra A es la variable y las restantes son términos independientes. La letra C que divide al primer término pasa multiplicando a todo el segundo miembro.

(A+B) = (B+D) C

La letra B que suma en el primer miembro pasa restando al segundo

A = C. (B + D) - B ✔

2) Determine B en la misma ecuación **(A+B)/C = B + D**

Solución
Estas expresiones se tratan iguales que las anteriores:
En este caso, la letra B es la variable y las restantes son términos independientes. La letra C que divide al primer término pasa multiplicando a todo el segundo miembro.

(A+B) = (B+D) .C

Aplicando propiedad distributiva
A+B = (B.C) + (D.C)

Reagrupamos los términos con la incógnita (la letra B) en un mismo miembro. Para esto pasamos la B que está sumando en el primer miembro, restando al segundo; y pasamos el término independiente D.C que está sumando en el segundo miembro restando al primero.

A – D.C = B.C - B

En el segundo miembro se obtiene como factor común a B para agrupar los coeficientes que lo acompañan (nótese que es el procedimiento inverso a la propiedad distributiva) . Recuerde que B tiene como coeficiente a 1.

A- D.C = B. (C-1)

Finalmente el coeficiente que multiplica a B pasa dividiendo a todo al 1er miembro. Y listo!!!!

$$\frac{A - D.C}{(C-1)} = B$$

Los valores de cada letra que representa variables y constantes se asignan según el problema planteado. Por ahora y a manera de ejemplificación: imagínese que B =3; C = 2 y D = 1 y sustituimos en los despejes ya realizados, entonces el valor de A es, a partir del despeje que realizamos:

A = C. (B + D) - B

A= 2. (3+1) -3 = 2.(4) -3 = 8-3

A= 5

Hagamos el mismo procedimiento para darle valor a B, suponga que A = 5; C = -2 y D = 4 y sustituimos en el despeje respectivo, entonces el valor de B, a partir del despeje que realizamos, es:

$$\frac{A - D.C}{(C-1)} = B \quad = \frac{5 - 4.(-2)}{(-2-1)} = \frac{5-(-8)}{-3} = \frac{5+8}{-3} = \frac{13}{3} = -\frac{13}{3}$$

En resumidas cuentas:
No hay que abrumarse por tener que despejar una variable y que los demás términos sean letras. Trátalos como números, y sigue el procedimiento, luego se les sustituyen por valores reales.

Ejercicios:

Resolver las siguientes ecuaciones. Recordar algo: los términos se separan en sumas y restas, las multiplicaciones y/o divisiones forman parte de un término

a) $\frac{x + 3}{4} = 6$ — Respuesta x = 21

b) $-\frac{3}{5} \cdot (15-2x) = -3$ — Respuesta x= 5

c) $4x - 5 (x + 3) = 2x - 3$ — Respuesta x= -4

d) $\frac{2(x+2)}{5} = \frac{x}{3}$ — Respuesta x= -12

e) $\frac{x + 1}{4} = \frac{x - 4}{2} - \frac{2x -3}{4}$ — Respuesta x= -6

f) $3= \sqrt{(x + 2)} - 3$ — Respuesta = 79

g) $\frac{[(x + 4)^3 - 6]}{3} = 7$ — Respuesta = -1